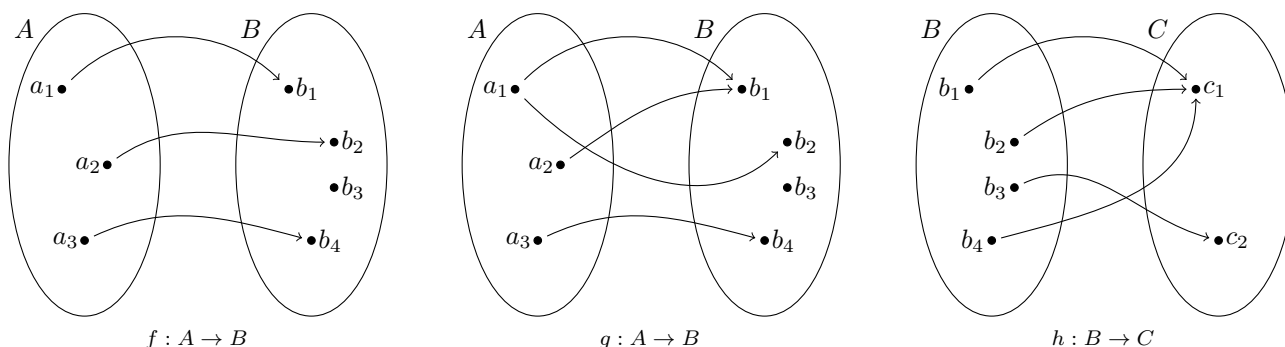


## Matematica generale: esonero dell'8 novembre 2011

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  come nella figura che segue:



- (a) Dire quali tra  $f$ ,  $g$  e  $h$  non sono funzioni, e perché.
  - (b) Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
  - (c) Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
  - (d) Si può fare la composizione  $h \circ f$  tra  $f$  ed  $h$ ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.
2. Risolvere la disequazione fratta  $\frac{-x^2 + 3x}{x - 1} - 2 \geq 0$ .
3. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  definite come segue:

$$f(x) = (\sqrt{-x})^4 + 1, \quad g(x) = \ln \left( \frac{-x^2 + 3x}{x - 1} - 2 \right), \quad h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq -1, \\ e^{6x+2} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

- (a) Determinare il dominio di  $f$ ,  $g$  e  $h$ .
  - (b) Determinare l'immagine di  $f$ .
  - (c) Dire se esiste l'inversa di  $f$ , e se si calcolarla.
  - (d) Dire se si può fare la composizione  $g \circ f$ , e se si calcolarla.
  - (e) Dire se esiste, e se esiste calcolare:
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x).$$
  - (f) Dire se  $h$  è una funzione continua. Se non lo è, dire per quali valori di  $x$  non è continua e perché.
  - (g) [opzionale] Se nella definizione di  $h$  sostituiamo  $x \leq -1$  con  $x < -1$ ,  $h$  è continua?
4. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n^3 + 4n^2 - 2n + 1}{(1+n)^3} \right)$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.

5. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{3^n}$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.